

# Spirale de Fermat / Fermat Spiral

---

Révision ULTIME bilingue FR-EN / ULTIME bilingual revision FR-EN

*Pascal Hesse - Orange Noire - 24 August / août 2026*

## FRANÇAIS

### Résumé

Nous étudions la spirale de Fermat  $\gamma(t)=\sqrt{t} e^{it}$  et le comptage des intersections produites par sa fermeture par symétrie centrale. La réduction géométrique conduit au domaine  $D=\{(x,y)\in[0,1]^2 : \sqrt{x}+\sqrt{y}\geq 1\}$ , d'aire  $5/6$ . Une reconstruction exacte des phases transforme les intersections régulières en points entiers d'une image de phase. Sur un cœur compact, cette application est une perturbation bornée de  $-(T/2\pi)I$  et devient globalement injective. L'absence d'arcs communs est obtenue par direction tangente et rayon de courbure. Une renormalisation des paramètres place les fibres dans une famille définissable bornée de  $\mathbb{R}_\text{an}$ , donnant une finitude uniforme. La zone frontière est contrôlée directement par un pavage du plan  $(x,y)$ , sans dériver les coordonnées angulaires au bord. Enfin, les quatre familles quadratiques de la double boucle sont écrites explicitement et ne diffèrent que par des translations constantes dans l'espace des phases. Les constantes principales obtenues sont  $5/(12\pi^2)$  pour une boucle et  $5/(3\pi^2)$  pour la double boucle.

*ULTIME désigne ici le dernier niveau fini de cette chaîne de révision avant un éventuel passage à une validation externe. Il ne signifie ni publication, ni validation indépendante.*

## ENGLISH

### Abstract

We study the Fermat spiral  $\gamma(t)=\sqrt{t} e^{it}$  and count the intersections produced by closing it through central symmetry. The geometric reduction leads to the domain  $D=\{(x,y)\in[0,1]^2 : \sqrt{x}+\sqrt{y}\geq 1\}$ , of area  $5/6$ . Exact phase reconstruction turns regular intersections into integer lattice points in the image of a phase map. On a compact core, this map is a bounded perturbation of  $-(T/2\pi)I$  and becomes globally injective. The absence of common arcs follows from tangent direction and radius of curvature. A renormalization of the parameters places the fibers in a bounded definable family in  $\mathbb{R}_\text{an}$ , yielding uniform finiteness. The boundary zone is controlled directly by a tiling of the  $(x,y)$ -plane, without differentiating angular coordinates at the boundary. Finally, the four quadratic families of the double loop are written explicitly and differ only by constant translations in phase space. The resulting leading constants are  $5/(12\pi^2)$  for one loop and  $5/(3\pi^2)$  for the double loop.

*Here ULTIME denotes the last finite level of this revision chain before possible external validation. It does not mean publication or independent validation.*

## 1. Cadre et énoncé / 1. Setting and statement

| FRANÇAIS                                                                                                                                                                         | ENGLISH                                                                                                                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Posons $\gamma(t)=\sqrt{t} e^{it}$ , $t \geq 0$ , et $A=\gamma(T)$ . Une intersection entre $C=\{\gamma(t):0 \leq t \leq T\}$ et $A-C$ est décrite par $\gamma(t)+\gamma(s)=A$ . | Let $\gamma(t)=\sqrt{t} e^{it}$ , $t \geq 0$ , and $A=\gamma(T)$ . An intersection between $C=\{\gamma(t):0 \leq t \leq T\}$ and $A-C$ is described by $\gamma(t)+\gamma(s)=A$ . |
| Nous comptons les points géométriques d'intersection, tangents ou transverses, les coïncidences multiples étant traitées séparément.                                             | We count geometric intersection points, whether tangent or transverse, with multiple coincidences treated separately.                                                            |
| Résultats annoncés : $N_F(1)(T)=5/(12\pi^2) T^2+o(T^2)$ et $N_F(2)(T)=5/(3\pi^2) T^2+o(T^2)$ .                                                                                   | Claimed results: $N_F(1)(T)=5/(12\pi^2) T^2+o(T^2)$ and $N_F(2)(T)=5/(3\pi^2) T^2+o(T^2)$ .                                                                                      |

## 2. Normalisation et domaine triangulaire / 2. Normalization and triangular domain

| FRANÇAIS                                                                                                                                                                                     | ENGLISH                                                                                                                                                                         |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Écrivons $x=t/T$ et $y=s/T$ . Après division par $\gamma(T)$ , l'équation devient $\sqrt{x} e^{iT(x-1)} + \sqrt{y} e^{iT(y-1)} = 1$ .                                                        | Write $x=t/T$ and $y=s/T$ . After division by $\gamma(T)$ , the equation becomes $\sqrt{x} e^{iT(x-1)} + \sqrt{y} e^{iT(y-1)} = 1$ .                                            |
| Les trois longueurs $\sqrt{x}$ , $\sqrt{y}$ et 1 doivent former un triangle. Sur $[0,1]^2$ , $ \sqrt{x}-\sqrt{y}  \leq 1$ est automatique. Il reste $D=\{(x,y):\sqrt{x}+\sqrt{y} \geq 1\}$ . | The three lengths $\sqrt{x}$ , $\sqrt{y}$ , and 1 must form a triangle. On $[0,1]^2$ , $ \sqrt{x}-\sqrt{y}  \leq 1$ is automatic. Thus $D=\{(x,y):\sqrt{x}+\sqrt{y} \geq 1\}$ . |
| Le complémentaire a aire $\int_0^1 (1-\sqrt{x})^2 dx = 1/6$ . Donc $\text{Area}(D)=5/6$ .                                                                                                    | The complement has area $\int_0^1 (1-\sqrt{x})^2 dx = 1/6$ . Hence $\text{Area}(D)=5/6$ .                                                                                       |

## 3. Reconstruction exacte des phases / 3. Exact reconstruction of the phases

| FRANÇAIS                                                                                                                                                                                                                                     | ENGLISH                                                                                                                                                                                                                               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Dans l'intérieur non dégénéré de $D$ , définissons $\alpha=\arccos((x+1-y)/(2\sqrt{x}))$ et $\beta=\arccos((y+1-x)/(2\sqrt{y}))$ , avec $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ .                                                                       | In the nondegenerate interior of $D$ , define $\alpha=\arccos((x+1-y)/(2\sqrt{x}))$ and $\beta=\arccos((y+1-x)/(2\sqrt{y}))$ , with $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ .                                                                    |
| Si $u=T(x-1)$ et $v=T(y-1)$ , la partie imaginaire impose $\sqrt{x} \sin u + \sqrt{y} \sin v = 0$ . Les deux orientations du triangle donnent exactement $(u,v)=(\alpha, -\beta)$ ou $(-\alpha, \beta)$ .                                    | If $u=T(x-1)$ and $v=T(y-1)$ , the imaginary part imposes $\sqrt{x} \sin u + \sqrt{y} \sin v = 0$ . The two orientations of the triangle give exactly $(u,v)=(\alpha, -\beta)$ or $(-\alpha, \beta)$ .                                |
| Ainsi, pour un unique $\sigma \in \{-1, +1\}$ hors dégénérescence, $T(x-1)=\sigma\alpha+2\pi m$ et $T(y-1)=-\sigma\beta+2\pi n$ , avec $m, n \in \mathbb{Z}$ . Réciproquement ces congruences reconstruisent exactement l'équation complexe. | Thus, for a unique $\sigma \in \{-1, +1\}$ away from degeneracy, $T(x-1)=\sigma\alpha+2\pi m$ and $T(y-1)=-\sigma\beta+2\pi n$ , with $m, n \in \mathbb{Z}$ . Conversely, these congruences reconstruct the complex equation exactly. |

## 4. Application de phase et injectivité du cœur / 4. Phase map and injectivity on the core

| FRANÇAIS                                                                                                                                                                                                                                        | ENGLISH                                                                                                                                                                                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Posons $p=(1-x, 1-y)$ et $G_\sigma(p)=\sigma/(2\pi)(-\alpha, \beta)$ . Alors $\Phi_{\{T, \sigma\}}(p) = -(T/(2\pi))p + G_\sigma(p)$ , et les solutions régulières sont exactement les $p$ tels que $\Phi_{\{T, \sigma\}}(p) \in \mathbb{Z}^2$ . | Set $p=(1-x, 1-y)$ and $G_\sigma(p)=\sigma/(2\pi)(-\alpha, \beta)$ . Then $\Phi_{\{T, \sigma\}}(p) = -(T/(2\pi))p + G_\sigma(p)$ , and the regular solutions are exactly those $p$ for which $\Phi_{\{T, \sigma\}}(p) \in \mathbb{Z}^2$ . |
| Choisissons $K_\delta = \{x \geq \delta, y \geq \delta, \sqrt{x}+\sqrt{y} \geq 1+\delta\}$ . Ce cœur est convexe. Sur $K_\delta$ , $\alpha$ et $\beta$ sont analytiques et $M_\delta = \sup  $                                                  | Choose $K_\delta = \{x \geq \delta, y \geq \delta, \sqrt{x}+\sqrt{y} \geq 1+\delta\}$ . This core is convex. On $K_\delta$ , $\alpha$ and $\beta$ are analytic and $M_\delta = \sup  $                                                    |

|                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $DG_\sigma    < \infty$ .                                                                                                                                                                                                                           | $DG_\sigma    < \infty$ .                                                                                                                                                                                                                   |
| Pour $p, q \in K_\delta$ , $  \Phi(p) - \Phi(q)   \geq (T/(2\pi) - M_\delta)   p - q  $ .<br>Donc $\Phi$ est globalement injective dès que $T > 2\pi M_\delta$ .<br>Comme $K_\delta$ est compact, $\Phi$ est alors un homéomorphisme sur son image. | For $p, q \in K_\delta$ , $  \Phi(p) - \Phi(q)   \geq (T/(2\pi) - M_\delta)   p - q  $ .<br>Hence $\Phi$ is globally injective as soon as $T > 2\pi M_\delta$ . Since $K_\delta$ is compact, $\Phi$ is then a homeomorphism onto its image. |
| De plus $D\Phi = -(T/(2\pi))I + DG_\sigma$ et $\det D\Phi = T^2/(4\pi^2) + O_\delta(T)$ .<br>Par changement de variables, $\text{Area}(\Phi(K_\delta)) = T^2/(4\pi^2) \text{Area}(K_\delta) + O_\delta(T)$ .                                        | Moreover $D\Phi = -(T/(2\pi))I + DG_\sigma$ and $\det D\Phi = T^2/(4\pi^2) + O_\delta(T)$ . By change of variables, $\text{Area}(\Phi(K_\delta)) = T^2/(4\pi^2) \text{Area}(K_\delta) + O_\delta(T)$ .                                      |

## 5. Réseau et bijection avec les intersections / 5. Lattice and bijection with intersections

| FRANÇAIS                                                                                                                                                                                                                                                             | ENGLISH                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Par construction, $Z^2 \cap \Phi_{\{T, \sigma\}}(K_\delta)$ est en bijection avec les solutions régulières de l'orientation $\sigma$ dans $K_\delta$ .<br>L'injectivité de $\Phi$ assure l'unicité du préimage.                                                      | By construction, $Z^2 \cap \Phi_{\{T, \sigma\}}(K_\delta)$ is in bijection with the regular solutions of orientation $\sigma$ in $K_\delta$ . Injectivity of $\Phi$ ensures uniqueness of the preimage.                                                                  |
| Une solution $(t, s)$ détermine le point $z = \gamma(t) = A - \gamma(s)$ . Les deux morceaux $C$ et $A - C$ sont injectifs en paramètre, puisque $ \gamma(t)  = \sqrt{t}$ . Le couple $(t, s)$ est donc unique pour un point géométrique de cette paire de morceaux. | A solution $(t, s)$ determines the point $z = \gamma(t) = A - \gamma(s)$ . The two pieces $C$ and $A - C$ are injectively parametrized because $ \gamma(t)  = \sqrt{t}$ . Thus the pair $(t, s)$ is unique for a geometric point of this pair of pieces.                 |
| Pour une région plane à bord rectifiable, le discrepancy du réseau est $O(\text{Length}(\partial\Omega) + 1)$ . Ici $\text{Length}(\partial\Phi(K_\delta)) = O_\delta(T)$ , d'où $\#(Z^2 \cap \Phi(K_\delta)) = T^2/(4\pi^2) \text{Area}(K_\delta) + O_\delta(T)$ .  | For a planar region with rectifiable boundary, the lattice discrepancy is $O(\text{Length}(\partial\Omega) + 1)$ . Here $\text{Length}(\partial\Phi(K_\delta)) = O_\delta(T)$ , hence $\#(Z^2 \cap \Phi(K_\delta)) = T^2/(4\pi^2) \text{Area}(K_\delta) + O_\delta(T)$ . |

## 6. Absence d'arcs communs / 6. Absence of common arcs

| FRANÇAIS                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | ENGLISH                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| La direction tangente de $\gamma$ est $\tau(t) = t + \arctan(2t)$ , strictement croissante. Son rayon de courbure est $\rho(t) = (4t^2 + 1)^{3/2} / (2\sqrt{t(4t^2 + 3)})$ , donc $\rho(t) \sim \sqrt{t}$ .                                                                                                            | The tangent direction of $\gamma$ is $\tau(t) = t + \arctan(2t)$ , which is strictly increasing. Its radius of curvature is $\rho(t) = (4t^2 + 1)^{3/2} / (2\sqrt{t(4t^2 + 3)})$ , so $\rho(t) \sim \sqrt{t}$ .                                                                                                                 |
| Supposons qu'un arc non trivial satisfasse $\gamma(t) + \gamma(h(t)) = A$ . Alors $\gamma(h(t)) = A - \gamma(t)$ . L'application $z \mapsto A - z$ est une isométrie, donc les droites tangentes sont parallèles et les rayons de courbure égaux.                                                                      | Suppose a nontrivial arc satisfies $\gamma(t) + \gamma(h(t)) = A$ . Then $\gamma(h(t)) = A - \gamma(t)$ . The map $z \mapsto A - z$ is an isometry, so tangent lines are parallel and radii of curvature are equal.                                                                                                             |
| Sur un sous-arc connexe, $\tau(t) - \tau(h(t)) = k\pi$ pour un entier constant $k$ . Si $k=0$ , l'injectivité de $\tau$ donne $h(t)=t$ , puis $2\gamma(t)=A$ , ce qui ne peut définir un arc.                                                                                                                          | On a connected subarc, $\tau(t) - \tau(h(t)) = k\pi$ for a constant integer $k$ . If $k=0$ , injectivity of $\tau$ gives $h(t)=t$ , then $2\gamma(t)=A$ , which cannot define an arc.                                                                                                                                           |
| Si $k \neq 0$ , $h = h_k = \tau^{-1}\{\tau(t) - k\pi\}$ . L'isométrie imposerait $F_k(t) = \rho(t) - \rho(h_k(t)) = 0$ sur un intervalle. Par identité analytique, $F_k$ serait identiquement nulle sur son domaine connexe. Or $h_k(t) = t - k\pi + o(1)$ et $F_k(t) \sim k\pi / (2\sqrt{t}) \neq 0$ . Contradiction. | If $k \neq 0$ , $h = h_k = \tau^{-1}\{\tau(t) - k\pi\}$ . The isometry would impose $F_k(t) = \rho(t) - \rho(h_k(t)) = 0$ on an interval. By the analytic identity theorem, $F_k$ would vanish identically on its connected domain. But $h_k(t) = t - k\pi + o(1)$ and $F_k(t) \sim k\pi / (2\sqrt{t}) \neq 0$ . Contradiction. |

## 7. Famille renormalisée et finitude uniforme / 7. Renormalized family and uniform finiteness

| FRANÇAIS                                                                                                                                                                                                                                                              | ENGLISH                                                                                                                                                                                                                                                               |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Pour éviter tout paramètre non borné dans l'argument de finitude, écrivons $u=T(x-1)-2\pi m$ , $v=T(y-1)-2\pi n$ avec $u,v\in[-\pi,\pi]$ , puis $\lambda=1/T$ , $a=2\pi m/T$ et $b=2\pi n/T$ .                                                                        | To avoid any unbounded parameter in the finiteness argument, write $u=T(x-1)-2\pi m$ , $v=T(y-1)-2\pi n$ with $u,v\in[-\pi,\pi]$ , then $\lambda=1/T$ , $a=2\pi m/T$ , and $b=2\pi n/T$ .                                                                             |
| Alors $x=1+a+\lambda u$ , $y=1+b+\lambda v$ et les équations deviennent $H1=\sqrt{(1+a+\lambda u)} \cos u + \sqrt{(1+b+\lambda v)} \cos v - 1 = 0$ et $H2=\sqrt{(1+a+\lambda u)} \sin u + \sqrt{(1+b+\lambda v)} \sin v = 0$ .                                        | Then $x=1+a+\lambda u$ , $y=1+b+\lambda v$ and the equations become $H1=\sqrt{(1+a+\lambda u)} \cos u + \sqrt{(1+b+\lambda v)} \cos v - 1 = 0$ and $H2=\sqrt{(1+a+\lambda u)} \sin u + \sqrt{(1+b+\lambda v)} \sin v = 0$ .                                           |
| Pour les solutions physiques et $0 < \lambda \leq 1$ , on peut prendre $a,b$ dans la boîte fixe $[-1-\pi,\pi]$ , tandis que $u,v\in[-\pi,\pi]$ . La famille est donc définissable dans $R_{an}$ sur un domaine borné.                                                 | For physical solutions and $0 < \lambda \leq 1$ , one may take $a,b$ in the fixed box $[-1-\pi,\pi]$ , while $u,v\in[-\pi,\pi]$ . The family is therefore definable in $R_{an}$ on a bounded domain.                                                                  |
| À paramètres $(\lambda,a,b)$ fixés, une fibre positive-dimensionnelle fournirait un arc régulier. Or $t=T(1+a)+u$ et $s=T(1+b)+v$ : un tel arc donnerait un arc de solutions $\gamma(t)+\gamma(s)=A$ , exclu par la section 6. Les cas $t=0$ ou $s=0$ sont ponctuels. | With parameters $(\lambda,a,b)$ fixed, a positive-dimensional fiber would yield a regular arc. But $t=T(1+a)+u$ and $s=T(1+b)+v$ : such an arc would give an arc of solutions $\gamma(t)+\gamma(s)=A$ , excluded by Section 6. The cases $t=0$ or $s=0$ are isolated. |
| Les fibres sont donc finies. La finitude uniforme o-minimale fournit une constante $B_F$ indépendante de $T,m,n$ qui borne leur cardinal.                                                                                                                             | The fibers are therefore finite. O-minimal uniform finiteness gives a constant $B_F$ , independent of $T,m,n$ , that bounds their cardinality.                                                                                                                        |

## 8. Frontière sans dérivées angulaires / 8. Boundary without angular derivatives

| FRANÇAIS                                                                                                                                                                                                                                                            | ENGLISH                                                                                                                                                                                                                                                        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Les indices $m,n$ déterminent des carrés $Q_{\{m,n\}}$ dans le plan $(x,y)$ de côté $h=2\pi/T$ . Soit $E_\delta=D\setminus K_\delta$ .                                                                                                                              | The indices $m,n$ determine squares $Q_{\{m,n\}}$ in the $(x,y)$ -plane with side $h=2\pi/T$ . Let $E_\delta=D\setminus K_\delta$ .                                                                                                                            |
| Pour tout ensemble plan borné $E$ à bord rectifiable, le nombre $N_h(E)$ de carrés d'un maillage de pas $h$ qui rencontrent $E$ vérifie $N_h(E) \leq C(\text{Area}(E)/h^2 + \text{Length}(\partial E)/h + 1)$ .                                                     | For every bounded planar set $E$ with rectifiable boundary, the number $N_h(E)$ of squares of a mesh of step $h$ meeting $E$ satisfies $N_h(E) \leq C(\text{Area}(E)/h^2 + \text{Length}(\partial E)/h + 1)$ .                                                 |
| La famille $E_\delta$ peut être choisie avec $\sup_\delta \text{Length}(\partial E_\delta) < \infty$ et $\text{Area}(E_\delta) \rightarrow 0$ . Chaque carré contient au plus $B_F$ solutions. Ainsi $N_E(T,\delta) \leq CB_F(T^2 \text{Area}(E_\delta) + T + 1)$ . | The family $E_\delta$ can be chosen with $\sup_\delta \text{Length}(\partial E_\delta) < \infty$ and $\text{Area}(E_\delta) \rightarrow 0$ . Each square contains at most $B_F$ solutions. Thus $N_E(T,\delta) \leq CB_F(T^2 \text{Area}(E_\delta) + T + 1)$ . |
| Par conséquent $\limsup_{T \rightarrow \infty} N_E(T,\delta)/T^2 \leq CB_F \text{Area}(E_\delta)$ , puis $\delta \rightarrow 0$ donne $N_{\text{boundary}}(T) = o(T^2)$ .                                                                                           | Consequently $\limsup_{T \rightarrow \infty} N_E(T,\delta)/T^2 \leq CB_F \text{Area}(E_\delta)$ , and then $\delta \rightarrow 0$ gives $N_{\text{boundary}}(T) = o(T^2)$ .                                                                                    |
| Cette étape n'utilise aucune borne sur $D_\alpha$ ou $D_\beta$ près du bord.                                                                                                                                                                                        | This step uses no bound on $D_\alpha$ or $D_\beta$ near the boundary.                                                                                                                                                                                          |

## 9. Une boucle et facteur 2 / 9. One loop and the factor 2

| FRANÇAIS                                                                                                                                                 | ENGLISH                                                                                                                                               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Pour chaque orientation $\sigma$ , le cœur contribue $T^2/(4\pi^2) \text{Area}(D) + o(T^2)$ . Les deux orientations sont distinctes hors dégénérescence. | For each orientation $\sigma$ , the core contributes $T^2/(4\pi^2) \text{Area}(D) + o(T^2)$ . The two orientations are distinct away from degeneracy. |
| La permutation $t \leftrightarrow s$ correspond génériquement aux                                                                                        | The permutation $t \leftrightarrow s$ generically corresponds to the                                                                                  |

|                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                       |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| deux points $z$ et $A-z$ , et non à deux codages du même point. Le cas $z=A/2$ équivaut à $t=s$ . Alors $2\gamma(t)=\gamma(T)$ , donc $t=T/4$ et une condition de phase discrète; il y a au plus $O(1)$ tels points. | two points $z$ and $A-z$ , not to two encodings of the same point. The case $z=A/2$ is equivalent to $t=s$ . Then $2\gamma(t)=\gamma(T)$ , so $t=T/4$ together with a discrete phase condition; there are at most $O(1)$ such points. |
| Ainsi<br>$N_F(1)(T)=2\cdot(1/(4\pi^2))\cdot(5/6)T^2+o(T^2)=5/(12\pi^2)T^2+o(T^2)$ .                                                                                                                                  | Hence<br>$N_F(1)(T)=2\cdot(1/(4\pi^2))\cdot(5/6)T^2+o(T^2)=5/(12\pi^2)T^2+o(T^2)$ .                                                                                                                                                   |

## 10. Double boucle : quatre familles quadratiques / 10. Double loop: four quadratic families

| FRANÇAIS                                                                                                                                                                                                                                     | ENGLISH                                                                                                                                                                                                                                            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Posons $P1=C$ , $P2=A-C$ , $P3=-C$ , $P4=-A+C$ . Parmi les six paires non ordonnées, $P1\cap P3=\{0\}$ et $P2\cap P4=\{0\}$ . Les quatre autres sont quadratiques.                                                                           | Set $P1=C$ , $P2=A-C$ , $P3=-C$ , $P4=-A+C$ . Among the six unordered pairs, $P1\cap P3=\{0\}$ and $P2\cap P4=\{0\}$ . The other four are quadratic.                                                                                               |
| $P1\cap P2$ et $P3\cap P4$ donnent $\gamma(t)+\gamma(s)=A$ et la carte $\Phi^{\{00\}}=-(T/(2\pi))p+G_\sigma(p)$ .                                                                                                                            | $P1\cap P2$ and $P3\cap P4$ give $\gamma(t)+\gamma(s)=A$ and the map $\Phi^{\{00\}}=-(T/(2\pi))p+G_\sigma(p)$ .                                                                                                                                    |
| $P2\cap P3$ donne $\gamma(t)-\gamma(s)=A$ . Le signe moins ajoute $\pi$ à la seconde phase, donc $\Phi^{\{01\}}=\Phi^{\{00\}}+(0,1/2)$ .                                                                                                     | $P2\cap P3$ gives $\gamma(t)-\gamma(s)=A$ . The minus sign adds $\pi$ to the second phase, so $\Phi^{\{01\}}=\Phi^{\{00\}}+(0,1/2)$ .                                                                                                              |
| $P1\cap P4$ donne $-\gamma(t)+\gamma(s)=A$ , donc $\Phi^{\{10\}}=\Phi^{\{00\}}+(1/2,0)$ .                                                                                                                                                    | $P1\cap P4$ gives $-\gamma(t)+\gamma(s)=A$ , hence $\Phi^{\{10\}}=\Phi^{\{00\}}+(1/2,0)$ .                                                                                                                                                         |
| Ces translations constantes ne changent ni $D\Phi$ , ni le déterminant principal, ni le domaine triangulaire $D$ , car les modules restent $\sqrt{x}$ , $\sqrt{y}$ , 1. Chacune des quatre familles contribue donc $5/(12\pi^2)T^2+o(T^2)$ . | These constant translations change neither $D\Phi$ , nor the leading determinant, nor the triangular domain $D$ , because the moduli remain $\sqrt{x}$ , $\sqrt{y}$ , 1. Each of the four families therefore contributes $5/(12\pi^2)T^2+o(T^2)$ . |
| Tout triplet de morceaux contient $P1,P3$ ou $P2,P4$ ; les intersections triples et quadruples sont donc confinées à 0 et ne produisent qu'un $O(1)$ de surcomptage.                                                                         | Every triple of pieces contains $P1,P3$ or $P2,P4$ ; triple and quadruple intersections are therefore confined to 0 and produce only $O(1)$ overcounting.                                                                                          |
| Ainsi $N_F(2)(T)=4\cdot 5/(12\pi^2)T^2+o(T^2)=5/(3\pi^2)T^2+o(T^2)$ .                                                                                                                                                                        | Thus $N_F(2)(T)=4\cdot 5/(12\pi^2)T^2+o(T^2)=5/(3\pi^2)T^2+o(T^2)$ .                                                                                                                                                                               |

## 11. Statut / 11. Status

| FRANÇAIS                                                                                                                                                                                                                                                                             | ENGLISH                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Cette révision incorpore explicitement les points soulevés lors des relectures critiques : signes des phases, injectivité globale, bijection réseau/intersections, isométrie dans le lemme de courbure, renormalisation o-minimale, frontière par pavage et quatre familles signées. | This revision explicitly incorporates the issues raised during the critical reviews: phase signs, global injectivity, the lattice/intersection bijection, the isometry in the curvature lemma, o-minimal renormalization, boundary control by tiling, and the four signed families. |
| Le document reste un préprint destiné à une relecture mathématique indépendante. Aucune validation éditoriale ou publication n'est revendiquée.                                                                                                                                      | The document remains a preprint intended for independent mathematical review. No editorial validation or publication is claimed.                                                                                                                                                    |

## Références / References

| FRANÇAIS                                                                                                     | ENGLISH                                                                                                   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Ingrédients standards utilisés : discrepancy des points de réseau pour des frontières rectifiables; théorème | Standard ingredients used: planar lattice-point discrepancy for rectifiable boundaries; analytic identity |

|                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                              |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>d'identité analytique; stratification définissable et finitude uniforme dans la structure o-minimale <math>R_{an}</math>. Des références bibliographiques précises devront être fournies dans une version destinée à soumission.</p> | <p>theorem; definable stratification and uniform finiteness in the o-minimal structure <math>R_{an}</math>. Precise bibliographic references should be supplied in a submission version.</p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|